1 | Linkskringelnd

Eine Abbildung $f\colon A \to B$ mit nicht-leerem Definitionsbereich A ist genau dann injektiv, wenn sie ein Linksinverses besitzt, wenn es also eine Abbildung $A \leftarrow B : g$ gibt, für die gilt $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Eine Abbildung ist surjektiv genau dann, wenn sie ein Rechtsinverses besitzt.

① $A \neq \emptyset$

($\Rightarrow$) Sei $f\colon A \longrightarrow B$ injektiv.

1,5 P

Dann ist für $b \in B$

entweder $f^{-1}(b) = \emptyset$

oder $f^{-1}(b) = \{a_b\}$

für ein $a_b \in A$.

Wähle beliebiges Element $a_\emptyset \in A$.
(möglich, da $A \neq \emptyset$).

Definiere

$$g\colon A \longrightarrow B$$

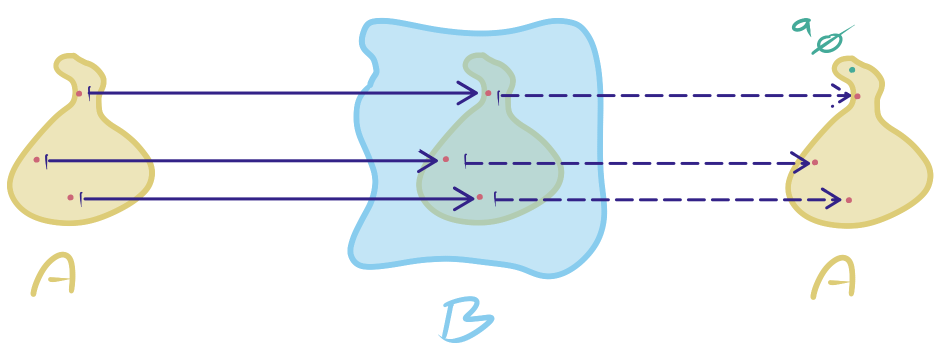
$$g(b) := \begin{cases} a_\emptyset & \text{falls } f^{-1}(b) = \emptyset \\ a_b & \text{falls } f^{-1}(b) = \{a_b\} \end{cases}$$

Dann ist per Konstruktion

$$g(f(a)) = a, \text{ denn } f^{-1}(f(a)) = \{a\}$$

Also $g \circ f = \mathrm{id}$ ✓

gilt immer $\supseteq$
wegen Injekt. $\subseteq$



($\Leftarrow$) Sei g gegeben derart, dass
1 P
$g \circ f = \mathrm{id}$.

Seien $a, a' \in A$ mit $f(a) = f(a')$.

Dann ist $g(f(a)) = g(f(a'))$,

also $\mathrm{id}(a) = \mathrm{id}(a')$,

also $a = a'$

$\square$

2 ($\Rightarrow$) Sei $f : A \to B$ surjektiv.
1,5 P
Dann ist für jedes $b \in B$

$$f^{-1}(b) \neq \emptyset.$$

Wir können also für jedes $b \in B$ ein Element $a_b \in f^{-1}(b)$ wählen.

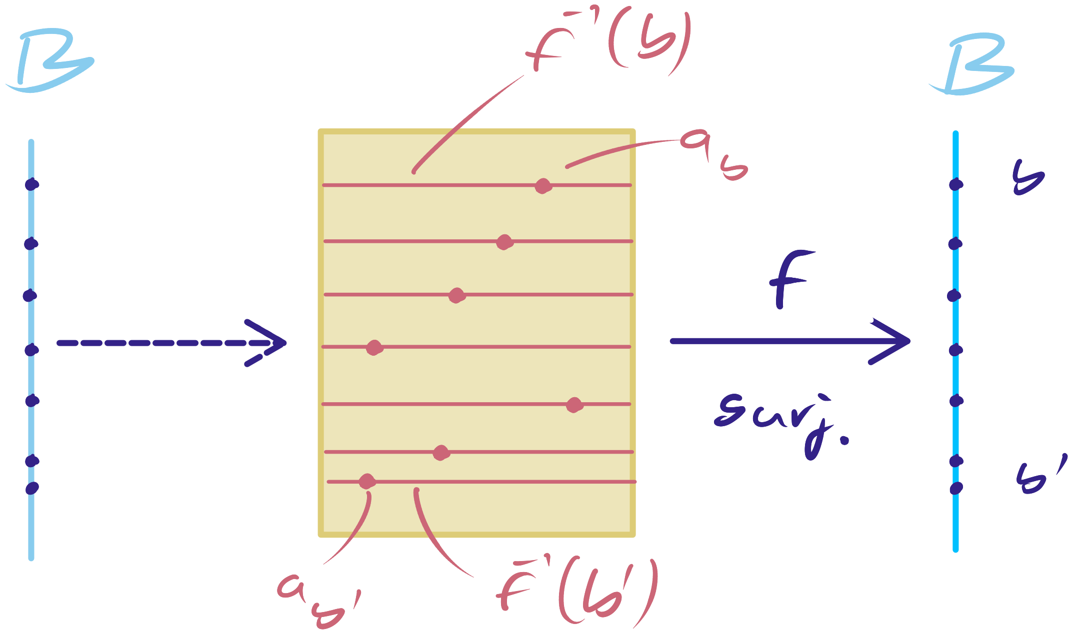
Definiere

$$g : B \to A$$
$$b \mapsto a_b.$$

Dann ist für jedes $b \in B$

$$f(g(b)) = b,$$

also ist $f \circ g = \mathrm{id}$.



($\Leftarrow$) Sei $g: B \to A$ gegeben sodass $f \circ g = id$.

1P

Sei $b \in B$ beliebig.

Es ist

$$f(g(b)) = f(g(b)) = id(b) = b.$$

Also ist f surjektiv. $\square$

2 | Gleichmacherei

Untenstehend sind einige Relationen auf $\mathbb{Z}$ angegeben. Welche sind symmetrisch? Welche reflexiv? Welche transitiv? Welche sind Äquivalenzrelationen, und was sind in diesen Fällen die Äquivalenzklassen?

(a) $x \sim y :\Leftrightarrow xy \geqslant 0$

1/8 symmetrisch, [denn $xy = yx$]
1/8 reflexiv [denn $x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{Z}$]
1/4 nicht transitiv, z.B.
$1 \sim 0$ und $0 \sim -1$,
aber $1 \not\sim -1$.

(b) $x \sim y :\Leftrightarrow xy > 0$

1/8 symmetrisch [denn $xy = yx$]
1/8 nicht reflexiv, denn $0 \not\sim 0$.
1/4 transitiv: $x \sim y \wedge y \sim z$
$\Rightarrow xy > 0 \wedge yz > 0$
$\Rightarrow xy^2z > 0$
Insbesondere ist also $y \neq 0$,
somit $y^2 > 0$ und es folgt:
$xz > 0$, also
$x \sim z$.

(c) $x \sim y :\Leftrightarrow x + y \geqslant 0$

1/8 symmetrisch [denn $x+y = y+x$]
1/8 nicht reflexiv, z.B. $-1 \not\sim -1$.
1/4 nicht transitiv, z.B.
$-1 \sim 1$ und $1 \sim -1$,
aber $-1 \not\sim -1$.

(d) $x \sim y :\Leftrightarrow x^3 = y^3$

1/2

Äquivalenzrelation $\sim_f$ für $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $x \longmapsto x^3$

1/2

Da 3. Wurzeln eindeutig gilt sogar:

$x \sim y \Leftrightarrow x = y$.

Also ist $[x] = \{x\} \subseteq \mathbb{Z}$.

(e) $x \sim y :\Leftrightarrow (x-2)^2 = (y-2)^2$

1/2

Äquivalenzrelation $\sim_f$ für $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $x \longmapsto (x-2)^2$

1/2

$$
\begin{aligned}
x \sim y &\Leftrightarrow (x-2)^2 = (y-2)^2 \\
&\Leftrightarrow x-2 = \pm(y-2) \\
&\Leftrightarrow x = \pm(y-2)+2 \\
&\Leftrightarrow (x = y \vee x = -y+4)
\end{aligned}
$$

Also

$[x] = \{x, -x+4\} \subseteq \mathbb{Z}$

(f) $x \sim y :\Leftrightarrow 5$ teilt $x - y$

1/2 Äquivalenzrelation $\sim_f$ zu

$f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ (Beispiel 2.22)

$x \longmapsto [x]$

1/2 $[x] = \{y \in \mathbb{Z} \mid y$ hat denselben Rest modulo 5 wie $x\}$

(g) $x \sim y :\Leftrightarrow x$ teilt y

1/8 nicht symmetrisch, z.B. $2 \sim 4$, $4 \not\sim 2$

1/8 reflexiv

1/4 transitiv: $x \sim y \wedge y \sim z$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: y = k \cdot x$

$\wedge \ \exists l \in \mathbb{Z}: z = l \cdot y$

$\Rightarrow z = l \cdot k \cdot x$,

also $x \sim z$.

für reflexiv/symmetrisch keine Begründung nötig

für nicht reflexiv/nicht symmetrisch Gegenbeispiel zwingend erforderlich

Gesamtpunktzahl für die Aufgabe wie immer auf halbe Punkte aufrunden!